

## ARTICLE 8

### Essai de Logique Tétravalente inspiré des textes Ummites

par Banban (Alban NANTY)  
email : banban@banban.org  
Mise à jour 14/03/2004

#### Elements nécessaires à la construction d'une logique

Dans la suite de cet article, je vais tenter de construire une logique des prédicats avec 4 valeurs de vérité. J'ai choisi la logique des prédicats plutôt que la logique propositionnelle car on a coutume de dire que la logique des prédicats étend la logique propositionnelle, donc qu'elle est plus évoluée. Dans tous les cours sur la logique des prédicats on commence souvent par énoncer les éléments constitutifs du langage. Je vais donc faire de même en reprenant en grande partie ce qui existe pour la logique des prédicats divalente et en l'étendant pour la logique des prédicats tétravalente.

Pour construire ma logique tétravalente des prédicats, j'ai besoin :

- De 4 valeurs de vérité (cf. le paragraphe suivant), donc 4 au lieu de 2
- De variables ( $x, y, z, \dots$ )
- De constantes ( $a, b, c, \dots$ )
- De fonctions ( $f, g, h, \dots$ )
- De prédicats ( $P, Q, R, \dots$ ), les "prédicats" remplacent les "propositions" de la logique propositionnelle
- Des parenthèses, de la virgule et du signe d'égalité
- De 5 connecteurs logiques ( $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ ), que j'appelle aussi opérateurs logiques
- De 2 quantificateurs ( $\forall, \exists$ ), respectivement "Pour tout" et "Il existe"

J'utiliserai le signe d'égalité pour indiquer la valeur de vérité d'un prédicat ou d'une fonction. Dans la logique divalente, toutes les fonctions sont vraies et si on veut écrire qu'une fonction est fautive on ajoute une négation devant. Evidemment en logique tétravalente, cela n'est plus possible, d'où l'emploi nécessaire du signe d'égalité suivi de la valeur de vérité.

#### Les valeurs de vérités

Pour commencer, je vais revenir sur les textes Ummites afin d'essayer d'attribuer un sens aux 4 valeurs de vérités de la logique tétravalente que je me propose de construire. On commence d'abord par l'extrait de texte le plus cité par ceux qui cherchent à établir une telle logique à partir des textes Ummites.

##### Extrait de D59 :

On a alors recours à un type de logique multivalente que nos spécialistes appellent UUWUUA IES (LOGIQUE MATHÉMATIQUE TÉTRAVALENTE) selon laquelle toute proposition adoptera indistinctement quatre valeurs :

- $AIOOYAA = (VÉRITÉ)$
- $AIOOYEEDOO = (FAUX)$
- $AIOOYA AMMIE = (peut se traduire : VRAI HORS DU WAAM)$
- $AIOOYAU = (intraduisible en langage terrestre).$

Il semble que les deux premières valeurs de vérité ne posent pas de problème d'interprétation et qu'on peut les associer directement aux deux valeurs de notre logique booléenne. Pour ce qui est des deux autres, il faut se référer à d'autres textes pour mieux cerner leur sens.

En y regardant de plus près, on remarque qu'il y a un mot commun à ces 4 valeurs, c'est le mot AIOOY, et même si on exclut la valeur de vérité FAUX, la racine commune est AIOOYA. Une petite recherche dans les textes Ummites sur ce mot AIOOYA nous en apprend plus.

##### Extrait de D78 (c'est moi qui souligne) :

*POUR MOI qui suis une pure conscience de mon IGIO UALEEXII (Moi libre) et des choses qui AIOOYA (existent dimensionnées) autour de moi, je suis plongé dans un WAAM (univers) qui me transcende.*

[...]

*Nous arrivons à la signification de l'AIOOYA dont la transcription en langage terrestre est impossible. AIOODI est "CE" qui*

est susceptible d'adopter des possibilités infinies "d'existence" (S1 ; S2, S3; ... . . . ; Sn). Ainsi, par exemple un IBOAYA OU (quantum énergétique, photon) peut être S1(ÊTRE) ou S2 (NE PAS ÊTRE, dans le cas où il se transforme en masse), mais les deux possibilités sont des déformations d'un AIOOYA provoquées par mon JE (être pensant).

Il semble que ce terme désigne quelque chose qui existe, au sens d'être dimensionnel. Il paraît logique alors qu'en lui adjoignant le concept A (effectivité) on retombe sur la définition de la VÉRITÉ (existe effectivement). Cette notion d'existence dimensionnelle se retrouve aussi dans les textes suivants :

Extrait de D41-15 (c'est moi qui souligne) :

*Il y a une grande difficulté à traduire les expressions de notre langage culturel, car sa constellation de significations est très différente de la complexité d'équivalents terrestres. Par exemple: nous, nous exprimons par le phonème AIOOYA votre verbe "EXISTER, ÊTRE", mais sa réelle signification pour nous a des nuances distinctes.*

*Ainsi nous considérons que le Cosmos, un virus ou le gaz d'hélium AIOOYA (existe).*

*Par contre nous exprimons que : AIOOYA AMIEE (n'existe pas) la beauté, l'âme ou WOA.*

*Comment comprendre ceci? C'est simple, nous appliquons le verbe "exister" à ce qui est dimensionnel (avec des caractéristiques de temps et d'espace), et "ne pas exister" à ce qui est adimensionnel comme peut l'être l'intelligence ou la joie. Au "RIEN" nous assignons un verbe qui n'a pas de signification pour vous; AIOYAYEDOO.*

Extrait de D79 (c'est moi qui souligne) :

*Il est véritablement difficile de parler de WOA dont nous ignorons l'essence, tout en étant contraints d'employer un langage étrangère dont les bases logiques sont bivalentes. Sur UMMO, quand nous employons l'expression phonétique AIOOYA AMIIE (dont la transcription littérale serait "N'EXISTE PAS") nous nous référons bien à des concepts abstraits ou à idées ou bien à WOA. Nous cherchons à exprimer quelque chose de différent de AIOODI (ÊTRE INACCESSIBLE ) puisque AIOODI se présente à nous avec des "dimensions" et que WOA est ADIMENSIONNEL, c'est-à-dire, qu'il n'est pas susceptible d'être déformé par notre pensée. Ainsi nous disons AIOOYA IBONEE (les radiations cosmiques existent) ou AA-INNUO-AIOOYA-AMIE (la symétrie n'existe pas).*

**NB :** On peut noter que le terme AIOOYA est aussi présent dans D33, mais cela n'apporte pas d'information supplémentaire.

Là encore on retrouve la notion d'existence dimensionnelle pour le terme AIOOYA. Et AIOYAYEDOO (ou AIOOYEEDOO dans la D59) désigne le "rien", c'est à dire la non existence dimensionnelle. C'est à dire une non existence perceptible par nos sens.

On apprend de plus que AIOOYA AMIEE (ou AIOOYA AMIIE) signifie n'existe pas dimensionnellement, et donc par conséquent est adimensionnel. Même si ce terme n'a pas la même orthographe que dans l'extrait D59, il est bien concordant avec ce qui est dit dans D59 : Tout ce qui est dans le WAAM (dans notre univers) peut être, à mon avis, raisonnablement considéré comme dimensionnel. Donc "VRAI HORS DU WAAM" est bien synonyme de VRAI pour quelque chose d'adimensionnel.

Les D77 et NR20 précisent de façon encore plus formelle ce que sont les troisième et quatrième termes de leur logique tétravalente.

Extrait de D77 (c'est moi qui souligne) :

*Nous nions le principe terrestre du tiers exclu (exclusion du moyen terme énoncé par Aristote) selon lequel les propositions ne peuvent être que VRAIES ou FAUSSES.*

*Une telle ligne dialectique déterminée exige de même que l'on refuse le principe que vous nommez de CONTRADICTION (par exemple dans le domaine que nous appelons théorie de BIEEWIGUU, qui peut se traduire par psychophysiologie).*

Donc, la troisième valeur de vérité sert à désigner le tiers exclu par Aristote, et la quatrième la contradiction.

Extrait de NR20 (c'est moi qui souligne) :

Nous basons notre système tétravalent sur la non acceptation formelle **du rejet d'un terme médian et d'un terme tiers** dans la dialectique. Dans ce système ce qui N'EST PAS se différencie du complémentaire de ce qui EST. Nous acceptons qu'un phénomène puisse à la fois ETRE ET NON ETRE ou NI ETRE NI NON ETRE.

La troisième valeur de vérité désigne donc ce qui peut être ni vrai ni faux, car hors de nos moyens de détermination (le fameux tiers que nous excluons dans la logique booléenne).

C'est pour cette raison, que j'ai choisi d'attribuer le sens de **INDETERMINABLE** à cette troisième valeur de vérité.

Concernant la dernière valeur de vérité, la NR20 entièrement dédiée à ce terme confirme ce que l'on pouvait pressentir à travers les autres lettres. En effet, ce terme ne diffère que d'un seul concept (le U final) du terme AIOOYA que l'on connaît maintenant

bien à travers les extraits de textes que je vous ai cités. Le concept U vaut pour "dépendance, soumission, condition, influence" (Jean Pollion, "Ummo de vrais Extraterrestres !", page 368). Je crois lire dans cette expression "existence dimensionnelle (AIOOYA) de dépendance (U)" c'est à dire une existence dimensionnelle qui est valable lorsqu'il y a une dépendance.

Cette existence dimensionnelle n'est pas effective (AIOOYA-A), n'est pas "une vue de l'esprit" pour reprendre la traduction de Jean Pollion (AIOOY-EEDOO), mais j'avais envisager qu'elle puisse être les deux à la fois pour exister, et la NR20 semble avoir confirmé cette hypothèse. Une proposition qui porterait une telle valeur de vérité serait une proposition qui est VRAIE et FAUSSE à la fois. Il existe quelques exemples célèbres en logique (comme l'exemple du barbier, cf à la fin de l'article) où certaines propositions semblent contradictoires car vraie et fausse à la fois. C'est pour cette raison, que j'ai choisi d'attribuer le sens de **CONTRADICTOIRE** (ou **ANTINOMIQUE**) à cette quatrième valeur de vérité.

**Définition** : Les 4 valeurs de vérité de cette logique tétravalente sont : VRAI noté V, FAUX noté F, INDETERMINABLE noté I et CONTRADICTOIRE noté C.

## Règles de composition des opérateurs

Il me semble que le passage de la logique binaire à la logique tétravalente ne devrait pas remettre en question les règles usuelles de composition des opérateurs. Dans la logique tétravalente que je présente, j'utiliserais donc les règles suivantes pour les opérateurs  $\wedge$  et  $\vee$  :

- Idempotence :  $A \circ A = A$
- Commutativité :  $A \circ B = B \circ A$
- Associativité :  $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$
- Distributivité :  $A \circ (B \wp C) = (A \circ B) \wp (A \circ C)$

A cela j'ajoute les lois de De Morgan que je considère encore valide en logique tétravalente dans la mesure où l'opérateur de négation est transformé en opérateur de complémentarité (voir paragraphe suivant) :

- $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$
- $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

J'utilise aussi deux règles qui peuvent être déduites de la théorie des ensembles (en considérant le  $\wedge$  comme une intersection et le  $\vee$  comme une union) :

- $A \vee (A \wedge B) = A$
- $A \wedge (A \vee B) = A$

Mais j'avoue que je n'ai pas trouvé de démonstration formelle pour ces règles. Si quelqu'un peut m'éclairer sur ce point, je suis preneur. Par contre on peut démontrer que les deux termes de gauche sont équivalents (à l'aide des lois de De Morgan et de l'axiome de la négation défini ci-dessous).

## La Négation (notée $\neg$ )

Les lettres Ummites nous reprochent la logique Aristotélicienne et sa négation du tiers exclu. Je ne pense pas que cela signifie qu'il faille banir la négation de notre langage. Il faut à mon avis simplement reconsidérer (c'est à dire redéfinir) la négation afin qu'elle n'exclue plus les tierces possibilités. La négation devient alors l'opérateur de complémentarité sur l'ensemble des valeurs possibles (comme indiqué dans la NR20).

**Définition** : Quelque chose qui "n'est pas A" est quelque chose qui peut être tout sauf A. C'est à dire, "non A" est le "complémentaire de A".

Donc quelque chose qui n'est pas **Vrai** est donc **tout sauf Vrai**. Dans la logique booléenne, il n'y a que 2 valeurs de vérité, Vrai ou Faux ; donc "**tout sauf Vrai**" est **Faux** puisqu'il ne reste que le Faux si vous enlevez le Vrai de l'ensemble des valeurs de vérité possibles.

Dans la logique tétravalente, vous l'aurez compris, le "**tout sauf Vrai**" représente les 3 autres valeurs de vérité.

L'opérateur de négation étant défini comme l'opérateur de complémentarité, il va de soit qu'une double négation (complément du complément de A) redonne la valeur d'origine.

**Axiome** :  $\neg\neg A = A$

Avant d'établir la table de vérité de l'opérateur de négation, je vais faire une petite digression, en calculant avant l'heure deux cases de la table de vérité de l'opérateur OU (j'utiliserais pour cela la règle ensembliste énoncée dans le paragraphe précédent) :

- $V \vee C = V \vee (V \wedge F) = V$
- $F \vee C = F \vee (V \wedge F) = F \vee (F \wedge V) = F$

Avec la nouvelle définition de la négation, et avec les deux résultats ci-dessus, on peut déduire par simple réécriture, la table de l'opérateur de négation :

- $\neg V = F \vee C \vee I = (F \vee C) \vee I = F \vee I$
- $\neg F = V \vee C \vee I = (V \vee C) \vee I = V \vee I$
- $\neg I = V \vee F \vee C = V \vee (F \vee C) = V \vee F$
- $\neg C = V \vee F \vee I = (V \vee F) \vee I = \neg I \vee I = \text{tautologie}$

$\neg V$	$F \vee I$
$\neg F$	$V \vee I$
$\neg I$	$V \vee F$
$\neg C$	Tautologie

## Les opérateurs ET (noté $\wedge$ ) et OU (noté $\vee$ )

Dans la première partie, je me suis contenté de donner un sens aux 4 valeurs de vérité. Mais cela n'a pas eu beaucoup d'incidence jusqu'à présent. A la limite, j'aurais pu décider de noter les 4 valeurs de vérité A, B, C, et D. Certaines personnes l'ont d'ailleurs fait et ont établi des tables de vérité à l'aide de quelques règles simple, voir par exemple la proposition de Martin Quinson et Julien Mary.

Le sens que j'ai donné aux 4 valeurs de vérité va maintenant prendre plus d'importance, puisqu'à partir de ces définitions empiriques (basées sur les textes Ummites) et grâce à l'aide de la NR20 je vais déterminer de façon axiomatique deux des cases des tables de vérité. Au paragraphe précédent, je vous disais que la valeur INDETERMINABLE, que je note "I", vaut pour ni vrai ni faux. Et la valeur de vérité CONTRADICTOIRE, que je note "C", vaut pour vrai et faux simultanément. J'en déduit donc les deux axiomes suivants, qui fondent véritablement la logique tétravalente que je propose :

**Axiome** : Par définition  $I = \neg V \wedge \neg F = \neg(V \vee F) = \neg(F \vee V)$ .

**Axiome** : Par définition  $C = V \wedge F = F \wedge V$ .

Par simple réécriture (utilisant les axiomes précédents ainsi que les règles de composition énoncés plus haut), on peut déterminer la majorité des autres cases des tables de vérité :

- $V \wedge I = V \wedge (\neg V \wedge \neg F) = (V \wedge \neg V) \wedge \neg F = \emptyset \wedge \neg F = \emptyset$
- $V \wedge C = V \wedge (V \wedge F) = (V \wedge V) \wedge F = V \wedge F = C$
- $F \wedge I = F \wedge (\neg V \wedge \neg F) = (F \wedge \neg F) \wedge \neg V = \emptyset \wedge \neg V = \emptyset$
- $F \wedge C = F \wedge (V \wedge F) = (F \wedge F) \wedge V = F \wedge V = C$
- $I \wedge C = (\neg V \wedge \neg F) \wedge (V \wedge F) = (V \wedge \neg V) \wedge (F \wedge \neg F) = \emptyset \wedge \emptyset = \emptyset$
- $V \vee I = \neg F$  (d'après la table de la négation)
- $V \vee C = V \vee (V \wedge F) = V$  (d'après la règle ensembliste)
- $F \vee I = \neg V$  (d'après la table de la négation)
- $F \vee C = F \vee (V \wedge F) = F$  (d'après la règle ensembliste)
- $I \vee C = I \vee (V \wedge F) = (I \vee V) \wedge (I \vee F) = \neg F \wedge \neg V = I$

Voici maintenant les deux tables de vérité pour les opérateurs ET et OU. Les cases déterminées par les axiomes sont sur fond jaune. Les cases déterminées par des réécritures sont sur fond vert.

$\wedge$	V	F	I	C
V	V	C	$\emptyset$	C
F	C	F	$\emptyset$	C
I	$\emptyset$	$\emptyset$	I	$\emptyset$
C	C	C	$\emptyset$	C

$\vee$	V	F	I	C
V	V	$\neg I$	$\neg F$	V
F	$\neg I$	F	$\neg V$	F
I	$\neg F$	$\neg V$	I	I
C	V	F	I	C

## Les opérateurs d'implication (noté $\rightarrow$ ) et d'équivalence (noté $\leftrightarrow$ )

Pour compléter notre logique tétravalente, il manque deux opérateurs : l'opérateur d'implication et l'opérateur d'équivalence, sachant que l'opérateur d'équivalence se déduit trivialement de l'opérateur d'implication, puisqu'une équivalence est une double implication mutuelle.

**Définition** : L'opérateur d'équivalence est défini d'après l'opérateur d'implication de la manière suivante :  $A \leftrightarrow B = A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$

Pour déterminer la table de vérité de l'opérateur d'implication, je vais là encore me baser sur 4 axiomes de base. Dans la logique divalente la table de vérité de l'implication ( $A \rightarrow B$ ) est la même que celle de l'expression ( $\neg A$  ou B). Par curiosité j'ai établie la table de vérité de l'implication avec cette définition. On obtient une tautologie sur toute la diagonale et les lignes sont constituées de la négation du terme de gauche (sauf pour la dernière ligne).

Mais je n'ai jamais vraiment été convaincu par cette définition, notamment car cela ne m'a jamais paru logique :- ) que l'implication  $F \rightarrow V$  soit V en logique divalente. Lorsque je m'en étonnais auprès de mon prof de logique, celui-ci me répondait "Avec des hypothèses fausses, on peut tout démontrer". Je ne suis pas vraiment d'accord pour dire qu'une déduction faite à partir d'une hypothèse fautive est valide dans tous les cas.

Pour essayer d'établir les 4 premières cases de la table de l'opérateur d'implication, je vais prendre un petit exemple : Imaginez que Catherine et Cindy habitent dans le même immeuble. Catherine habite au quatrième étage et Cindy au cinquième comme le font penser leur prénom. On peut écrire un certain nombre de propositions qui peuvent être vraies ou fausses, mais je fais sciemment attention de ne pas écrire de proposition à la forme négative :

- P1 = "Cindy habite au dessus de Catherine" est VRAI
- P2 = "Catherine habite en dessous de Cindy" est VRAI
- P3 = "Catherine habite au dessus de Cindy" est FAUX
- P4 = "Cindy et Catherine habitent le même étage" est FAUX
- P5 = "Cindy habite en dessous de Catherine" est FAUX

Maintenant nous allons tenter de déterminer la valeur de vérité de l'implication d'une proposition vers l'autre. Attention, il faut bien avoir à l'esprit que la valeur de vérité des différentes propositions est connue à l'avance, et que ce que l'on cherche à connaître, c'est la valeur de vérité de la déduction. D'autre part pour évaluer la valeur de vérité de l'implication à l'aide de propositions issues du langage naturel, il faut que les propositions appartiennent au même domaine de réflexion. Si vous me demandiez d'évaluer l'implication qu'il y a entre "Cindy habite au dessus de Catherine" et "l'âge du capitaine est de 42 ans" je ne pourrais évidemment pas vous répondre, car il n'y a aucun lien logique qui permet de valider ou invalider la déduction.

### Implication de type $V \rightarrow V$

On a par exemple  $P1 \rightarrow P2$ . Cette implication me paraît vraie. Je n'ai pas beaucoup de commentaire à faire sur cette implication, néanmoins, je voudrais mettre en garde les gens qui souhaiteraient me proposer un contre exemple à l'implication de type  $V \rightarrow V$  avec une proposition vraie construite à l'aide d'une négation. Imaginer la proposition P6 suivante qui est la négation de P4 :

- P6 =  $\neg P4$  = "Cindy et Catherine n'habitent pas le même étage"

Vous pourriez penser que cette proposition P6 est vraie (puisque l'on sait que Catherine habite au 4ème et Cindy au 5ème) et que l'implication  $P6 \rightarrow P1$  de type  $V \rightarrow V$  est abusive car Catherine pourraient habiter au dessus de Cindy sans violer la vérité de P6, mais en fait P6 a pour valeur de vérité VRAI ou INDETERMINABLE (et non pas VRAI) car elle a été construite à l'aide d'une négation, et donc l'implication  $P6 \rightarrow P1$  est de type  $(V \vee I) \rightarrow V$ .

**Axiome** :  $V \rightarrow V = V$ .

### Implication de type $V \rightarrow F$

On a par exemple  $P1 \rightarrow P3$  ou  $P1 \rightarrow P4$ . Ces implications me paraissent aussi vraies. En effet si "Cindy habite au dessus de Catherine" est VRAI alors "Catherine habite au dessus de Cindy" est nécessairement FAUX. Faire cette déduction me paraît tout à fait légitime. Je suis conscient tout de même que cela va à l'encontre de ce que propose la logique divalente pour ce cas.

**Axiome** :  $V \rightarrow F = V$ .

### Implication de type $F \rightarrow V$

On a par exemple  $P4 \rightarrow P1$ . cette implication me paraît fausse. Le fait que "Cindy et Catherine habitent le même étage" soit FAUX ne nous permet pas d'en déduire que "Cindy habite au dessus de Catherine" soit VRAI, car on aurait pu aussi déduire que Catherine habite au dessus de Cindy et donc que "Cindy habite au dessus de Catherine" soit FAUX. La déduction est abusive.

A mon avis, une proposition fausse n'est pas suffisamment porteuse d'information et on a vu qu'on ne peut pas nier une proposition fausse pour la rendre vraie (donc il n'y a pas de possibilité de la rendre porteuse de plus d'information). Une proposition fausse n'est qu'une hypothèse que l'on peut éliminer de la liste de toutes les hypothèses possibles, sans pouvoir en déduire quelles sont les hypothèses vraies (ou fausses) parmi celles qui restent ; alors qu'une proposition vraie est une hypothèse sûre sur laquelle on peut se baser pour trouver d'autres hypothèses vraies ou fausses.

Cela dit on pourrait imaginer qu'en listant toutes les propositions fausses on pourrait en déduire quelque chose de façon valide. Mais est-il seulement possible de lister toutes les propositions fausses ? Faudrait-il lister toutes les propositions fausses de l'Univers pour être entièrement exhaustif ? Essayons toujours : par exemple l'implication  $(P3 \text{ et } P4) \rightarrow P2$  semble tout à fait valide, et la proposition composite  $(P3 \text{ et } P4)$  est bien fausse puisque  $P3$  est faux et  $P4$  est faux. Donc il semblerait qu'on ait une implication de la forme  $F \rightarrow V$  qui soit valide. Il est facile de voir que ce cas se produit uniquement lorsqu'on énumère tous les cas faux. Dans cette situation, il semblerait qu'on puisse valablement déduire que les cas restants sont vrais. Un autre exemple : on pourrait énumérer toutes les propositions du style "Cindy habite au n-ième étage" est FAUX, sauf pour le 5ème étage (sauf pour  $n = 5$ ), et en déduire qu'elle habite au 5ème, puisque c'est le seul étage non énuméré dans la liste des propositions fausses. Mais en raisonnant de la sorte, on oublie une proposition implicite qui est "Catherine et Cindy habitent dans le même immeuble". Et même si vous me disiez que vous ajoutiez "Catherine et Cindy habitent dans des immeubles différents" est FAUX à  $(P3 \text{ et } P4)$  pour conclure  $P2$ , je pourrais vous dire aussi que vous avez oublié la proposition implicite suivante "Catherine et Cindy sont deux personnes différentes", etc... C'est une suite qui est à mon avis sans fin. Bref, je doute que l'on puisse énumérer en toute rigueur toutes les propositions fausses nécessaires pour conclure de façon valide à quelque chose. Par conséquent la véracité d'une telle proposition me paraît indéterminable.

**Axiome** :  $F \rightarrow V = I$ .

### Implication de type $F \rightarrow F$

On a par exemple  $P3 \rightarrow P4$ . Cette implication me paraît aussi fausse pour les mêmes raisons que  $P4 \rightarrow P1$ . Savoir que "Catherine habite au dessus de Cindy" est FAUX ne suffit pas pour en déduire que "Cindy et Catherine habitent le même étage" est aussi FAUX, car elle pourraient effectivement habiter le même étage.

Mais d'un autre côté on peut remarquer que l'implication  $P3 \rightarrow P3$  est aussi de type  $F \rightarrow F$ , et que pourtant elle paraît légitimement vraie. De même l'implication  $P3 \rightarrow P5$  semble aussi valide. Par conséquent ce type d'implication semble être vraie ou fausse, c'est à dire non indéterminable.

**Axiome** :  $F \rightarrow F = \neg I$ .

### Le reste des implications

Le reste des implications ne se déduit pas aussi simplement que je le voudrais. Voici d'abord les réécritures pour l'implication :

- $V \rightarrow I = ?$
- $V \rightarrow C = V \rightarrow (V \wedge F) = V \rightarrow V \wedge V \rightarrow F = V \wedge V = V$
- $F \rightarrow I = ?$
- $F \rightarrow C = F \rightarrow (V \wedge F) = F \rightarrow V \wedge F \rightarrow F = I \wedge \neg I = \emptyset$
- $I \rightarrow V = ?$

- $I \rightarrow F = ?$
- $I \rightarrow I = ?$
- $I \rightarrow C = ?$
- $C \rightarrow V = ?$
- $C \rightarrow F = ?$
- $C \rightarrow I = ?$
- $C \rightarrow C = ?$

Et celles pour l'équivalence :

- $V \leftrightarrow V = V \rightarrow V \wedge V \rightarrow V = V \wedge V = V$
- $V \leftrightarrow F = V \rightarrow F \wedge F \rightarrow V = V \wedge I = \emptyset$
- $V \leftrightarrow I = V \rightarrow I \wedge I \rightarrow V = ?$
- $V \leftrightarrow C = V \rightarrow C \wedge C \rightarrow V = V \wedge ? = ?$
- $F \leftrightarrow F = F \rightarrow F \wedge F \rightarrow F = I \wedge I = I$
- $F \leftrightarrow I = F \rightarrow I \wedge I \rightarrow F = ?$
- $F \leftrightarrow C = F \rightarrow C \wedge C \rightarrow F = \emptyset \wedge ? = \emptyset$
- $I \leftrightarrow I = I \rightarrow I \wedge I \rightarrow I = ?$
- $I \leftrightarrow C = I \rightarrow C \wedge C \rightarrow I = ?$
- $C \leftrightarrow C = C \rightarrow C \wedge C \rightarrow C = ?$

Et donc voici les tables de vérité de l'implication et de l'équivalence. Les cases déterminées par les axiomes sont sur fond jaune, celles déterminées par des réécritures sont sur fond vert.

$\rightarrow$	V	F	I	C
V	V	V		V
F	I	$\neg I$		$\emptyset$
I				
C				

$\leftrightarrow$	V	F	I	C
V	V	$\emptyset$		
F	$\emptyset$	I		$\emptyset$
I				
C		$\emptyset$		

## Exemple de résolution de problème

### Le barbier

Enoncé du problème : Dans sa ville le barbier rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes et uniquement ceux-là. Qui rase le Barbier ?

On utilise seulement deux fonctions,  $Rase(x,y)$  qui signifie "x rase y" et  $Barbier(x)$  qui signifie "x est le barbier".

$P =$  "Tout homme qui ne se rase pas lui-même, est rasé par le Barbier"

$P = \forall x Rase(x,x) = F, \exists y Barbier(y) = V, Rase(y,x) = V$

On peut réécrire  $P = \forall x \exists y Barbier(y) = V, Rase(x,x) = F, Rase(y,x) = V$

En Particulier pour  $y = x$  on a  $Q = \exists x Barbier(x) = V, Rase(x,x) = F, Rase(x,x) = V$

Or " $Rase(x,x) = F, Rase(x,x) = V$ " peut se réécrire " $Rase(x,x) = C$ "

Donc finalement  $Q = \exists x Barbier(x) = V, Rase(x,x) = C$

Ce qui veut dire que  $Q =$  "Le barbier se rase lui-même" est CONTRADICTOIRE.

### L'ensemble normal

Enoncé du problème : Un ensemble normal est par définition un ensemble qui ne se contient pas lui-même. L'ensemble des ensembles normaux est-il normal ?

On utilise deux fonctions  $Normal(x)$  qui signifie "x est normal" et  $Element(x,y)$  qui signifie "x est élément de y".

$P =$  "Un ensemble Normal est un ensemble qui ne se contient pas lui-même"

$P = \forall x \text{ Normal}(x) = V, \text{Element}(x,x) = F$   
 $Q = \text{"Il existe l'ensemble de tous les ensembles normaux"}$   
 $Q = \forall x \text{ Normal}(x) = V, \exists y \text{Element}(x,y) = V$

En particulier pour  $x = y$ , d'après le prédicat  $Q$  on a  $Q' = \exists y \text{Normal}(y) = V, \text{Element}(y,y) = V$   
 Ce qui contredit bien évidemment le prédicat  $P$ . Si on associe  $P$  et  $Q$  pour le cas particulier  $x = y$  on a :  
 $R = \exists y \text{Normal}(y) = V, \text{Element}(y,y) = F \wedge \text{Element}(y,y) = V$   
 Ce qui peut se réécrire :  
 $R = \exists y \text{Normal}(y) = V, \text{Element}(y,y) = C$   
 Ce qui veut dire  $R = \text{"Il existe un ensemble normal qui se contient et ne se contient pas lui-même"}$

## Le crocodile

Enoncé du problème : Un crocodile s'empare d'un bébé et propose à la mère : "Si tu devines ce que je vais faire, je te rends le bébé, sinon je le dévore.". Pour le sauver, la mère réponds : "Tu vas le dévorer".

On utilise 3 fonctions  $\text{Dit}(x,y)$  qui signifie "x dit y",  $\text{Rend}(x,y)$  qui signifie "x rend y" et  $\text{Dévore}(x,y)$  qui signifie "x dévore y".

$P = \text{"Si la mère dit ce que fait le Croco au Bébé, le Croco rend le Bébé"}$   
 $P = \forall x \text{Dit}(Mère,x) = V \wedge x(\text{Croco,Bébé}) = V \rightarrow \text{Rend}(\text{Croco,Bébé}) = V$   
 $Q = \text{"Si la mère dit autre chose que ce que fait le Croco au Bébé, le Croco dévore le Bébé"}$   
 $Q = \forall x \text{Dit}(Mère,x) = V \wedge x(\text{Croco,Bébé}) = F \rightarrow \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = V$   
 $R = \text{"Le Croco ne fait qu'une seule chose au Bébé"}$   
 $R = \forall x x(\text{Croco,Bébé}) = V \rightarrow \forall y = \neg x y(\text{Croco,Bébé}) = F$   
 (NB " $\forall y = \neg x$ " veut dire "Pour tout y différent de x")  
 $S = \text{"Le Croco dévore le Bébé"}$   
 $S = \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = V$   
 $T = \text{"Le Croco rend le Bébé"}$   
 $T = \text{Rend}(\text{Croco,Bébé}) = V$

### Cas 1.1 : La mère dit S et le Croco fait S

On a dans ce cas d'après  $P$  :  
 $P' = \text{Dit}(Mère,S) = V \wedge \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = V \rightarrow \text{Rend}(\text{Croco,Bébé}) = V$   
 Et d'après  $R$  on a :  
 $R' = \text{Rend}(\text{Croco,Bébé}) = V \rightarrow \forall y = \neg \text{Rend } y(\text{Croco,Bébé}) = F$   
 donc en particulier pour  $y = \text{Dévore}$   
 $R'' = \text{Rend}(\text{Croco,Bébé}) = V \rightarrow \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = F$   
 On a donc au final :  $\text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = V \wedge \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = F$   
 Ce qui se réécrit  $\text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = C$

### Cas 1.2 : La mère dit S et le Croco fait T

On a dans ce cas d'après  $R$  :  
 $R' = \text{Rend}(\text{Croco,Bébé}) = V \rightarrow \forall y = \neg \text{Rend } y(\text{Croco,Bébé}) = F$   
 donc en particulier pour  $y = \text{Dévore}$   
 $R'' = \text{Rend}(\text{Croco,Bébé}) = V \rightarrow \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = F$   
 Et d'après  $Q$  on a :  
 $Q' = \text{Dit}(Mère,S) = V \wedge \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = F \rightarrow \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = V$   
 Donc on a au finale :  $\text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = F \wedge \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = V$   
 Ce qui se réécrit  $\text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = C$

Donc d'après les cas 1.1 et 1.2 on a :  
 $\text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = C \vee \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = C$  ce qui se réécrit  $\text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = C$   
 $\text{Dit}(Mère,S) = V \rightarrow \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = C$

### Cas 2.1 : La mère dit T et le Croco fait S

On a dans ce cas d'après  $R$  :  
 $R' = \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = V \rightarrow \forall y = \neg \text{Dévore } y(\text{Croco,Bébé}) = F$   
 donc en particulier pour  $y = \text{Rend}$   
 $R'' = \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = V \rightarrow \text{Rend}(\text{Croco,Bébé}) = F$   
 Et d'après  $Q$  on a :  
 $Q' = \text{Dit}(Mère,T) = V \wedge \text{Rend}(\text{Croco,Bébé}) = F \rightarrow \text{Dévore}(\text{Croco,Bébé}) = V$

### Cas 2.2 : La mère dit T et le Croco fait T

On a dans ce cas d'après P :

$$P' = \text{Dit}(\text{Mère}, T) = V \wedge \text{Rend}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = V \rightarrow \text{Rend}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = V$$

Et d'après R on a :

$$R' = \text{Rend}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = V \rightarrow \forall y = \neg \text{Rend } y(\text{Croco}, \text{Bébé}) = F$$

donc en particulier pour  $y = \text{Dévore}$

$$R'' = \text{Rend}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = V \rightarrow \text{Dévore}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = F$$

Donc d'après les cas 2.1 et 2.2 on a :

$$\text{Rend}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = F \vee \text{Rend}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = V \text{ ce qui se réécrit } \text{Rend}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = \neg I$$

$$\text{Dévore}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = V \vee \text{Dévore}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = F \text{ ce qui se réécrit } \text{Dévore}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = \neg I$$

$$\text{Dit}(\text{Mère}, T) = V \rightarrow \text{Dévore}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = \neg I \wedge \text{Rend}(\text{Croco}, \text{Bébé}) = \neg I$$