Quelques réflexions au sujet des Ibozoo uu

Shockwave

June 17, 2003

Je voudrais apporter ici quelques idées en vrac qui, j'espère, pourront aider ceux qui cogitent sur les ibozoo uu. Ce texte est un peu technique mais n'est pas d'une grande rigueur scientifique, je le reconnais. A mon sens, derrière le concept d'ibozoo uu se cache avant tout un outil mathématique de portée générale comme les vecteurs, tenseurs etc... Il se trouve que cet être mathématique est à même de décrire la réalité comme la géométrie Riemanienne par rapport à la relativité générale.

Je vais introduire progressivement certaines notions et ainsi essayer de faire émerger une trame qui pourrait aider à affiner la définition de cet objet "nouveau". Tout d'abord je vais tenter de l'illustrer par un exemple simple. Plaçons nous dans un espace plan. D'un point de vue mathématique on peut définir une rotation d'un angle θ dans cet espace par l'opérateur $\mathbf{R}$ représenté par la matrice

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{0.1}$$

Tout vecteur de cet espace, par exemple le vecteur $\mathbf{v}$ tel que

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{0.2}$$

dans un repère quelconque, subit une rotation qui le fait alors correspondre à un vecteur $\mathbf{v}'$ tel que

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \tag{0.3}$$

avec

$$\mathbf{v}' = \mathbf{R}\mathbf{v} \tag{0.4}$$

ce qui donne pour les composantes de $\mathbf{v}'$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \tag{0.5}$$

Une telle rotation laisse la norme des vecteurs invariante, i.e. leur longueur est indentique, i.e. $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x'^{\,2}+y'^{\,2}} = |\mathbf{v}'|$. En d'autres termes, en dehors de toute notion de repère, si on considére deux vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ tels que $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}'$ mais avec $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'|$, il existe une rotation d'un angle θ permettant de passer du vecteur $\mathbf{v}$ à $\mathbf{v}'$ et réciproquement. Une telle rotation peut être décrite par une matrice de rotation $\mathbf{R}$ dont la formulation dépend du repère dans lequel on se place. Toutefois, ce dernier point est secondaire car cela n'est qu'une question de représentation et cela ne change en rien les propriétés de l'opérateur $\mathbf{R}$. On peut donc imaginer une famille de vecteurs $v_0, v_1, v_2, v_3, ...v_i, ...v_\infty$, tous de même norme, i.e. $|v_0| = |v_1| = |v_2| = |v_3| =, ... |v_i|, ... = |v_\infty|$, mais ayant tous une orientation différente. On pourra très bien choisir le vecteur v_0 par exemple comme référence. Quoi qu'il en soit, ce qui est important, c'est que l'on peut passer d'un vecteur à un autre par une rotation ou série de rotations. Par exemple, on pourra passer du vecteur v_0 à v_1 par une rotation d'un angle θ_1 et du vecteur v_0 à v_8 par une rotation d'un angle θ_8. Mais également, on peut passer du vecteur v_1 à v_8 par une rotation d'un angle $\theta_8 - \theta_1$. Toutes ces rotations sont descriptibles en terme d'opérateur $\mathbf{R}(\theta)$.

Imaginons maintenant un ensemble d'entités. Vous ne pouvez rien dire de ces entités, vous ne pouvez leur attribuer de volume ou de forme. Mais vous savez cependant qu'elles possèdent des propriétés d'orientations les unes par rapport aux autres. Dans le cas de notre espace plan, cela reviendrait à dire que vous avez des entités dont vous ne pouvez rien savoir de leur étendue et de leur forme, et ces notions pourraient bien ne pas avoir de sens d'ailleurs. Par contre vous pouvez leur attribuer à chacune un axe fictif, en l'occurence un vecteur qui traduit leur orientation les unes par rapport aux autres. Dans un tel système de représentation, il va de soit que ce qui va avoir de l'importance ce n'est pas justement de tels axes ou vecteurs qui sont d'ailleurs arbitraires. Ce qui va avoir de l'importance c'est la différence d'orientation entre ces vecteurs, i.e. ce qui est susceptible d'avoir un sens physique ce sont les différents angles d'orientation.

De ce point de vue, vous pouvez faire abstraction de toute notion d'axe ou vecteur, ou de repère dans lequel représenter vos entités. Ce qui va avoir une importance et un sens physique, c'est l'angle qui définit la différence d'orientation entre deux entités. En d'autres termes, l'entité "zéro" qui était associée au vecteur

v_0 sera définit par la rotation qui l'amène à elle même, c'est à dire une rotation d'angle nul. Autrement dit, l'entité "zéro" sera définie par l'opérateur rotation $\mathbf{R}(\theta_0 = 0)$, i.e.

$$\mathbf{R}(\theta_0 = 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{0.6}$$

De même, une entité i qui était associée au vecteur v_i sera définie par la rotation qui permet de passer de l'entité "zéro" à l'entité i, i.e. la rotation qui permet de passer du vecteur v_0 à v_i. Autrement dit, l'entité i sera définie par l'opérateur rotation $\mathbf{R}(\theta_i)$, i.e.

$$\mathbf{R}(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \tag{0.7}$$

On voit donc que l'on abandonne dès lors la notion de vecteur d'orientation pour définir les entités. On préférera définir les entités par l'opérateur de rotation permettant de passer de l'une à l'autre, par rapport à la référence. En effet, le paramètre qui à seul un sens physique est l'angle d'orientation qui va définir l'opérateur de rotation. Pourquoi alors définir les entités par ces opérateurs et pas uniquement par rapport aux angles. En fait cela revient au même, mais c'est surtout une question d'écriture et de méthode calculatoire. En effet, l'algèbre associée aux opérateurs de rotations va permettre de définir les propriétés des angles et donc de dégager leurs propriétés et/ou correspondances physique.

Nous allons maintenant franchir un seuil dans notre explication. Les rotations dans l'espace plan, i.e. à deux dimensions, correspondent au groupe $SO(2)$. Les rotations dans l'espace à trois dimensions correspondent au groupe $SO(3)$. Et le groupe des rotations dans un espace à N dimensions est le groupe $SO(N)$. Pour le groupe $SO(N)$ il faut $P_N = \frac{1}{2}N(N-1)$ paramètres pour définir les rotations. Ainsi, pour le groupe $SO(2)$ il faut $P_2 = 1$ paramètre, en l'occurence ce paramètre c'est l'angle unique de rotation θ. Pour le groupe $SO(3)$ il faut $P_3 = 3$ paramètres, i.e. on a trois angles pour définir les rotations. Maintenant, les choses vont se compliquer de manière substantielle. Il existe également des rotations dans les espaces complexes, i.e. des espaces où chaque dimension est définie par une grandeur complexe avec une partie réelle et une partie imaginaire (au sens mathématique du terme bien sur). Dans ce cas, les groupes de transformations sont les groupes $SU(N)$ définis par $N^2 - 1$ paramètres. Parallèlement, pour en revenir aux espaces réels, ceux-ci peuvent être affublés d'une métrique particulière. Par exemple comme celle de l'espace-temps en relativité restreinte. Par exemple le groupe des rotations en relativité restreinte est $SO(3,1)$ avec 6 paramètres dotés d'une algèbre différente du cas $SO(4)$. **Par ailleurs, IL NE FAUDRAIT**

SURTOUT PAS CROIRE QUE LES IBOZOO UU ont alors quelque chose à voir avec le groupe de transformation de la relativité restreinte, il n'est ici donné qu'à titre d'exemple d'un type de groupe qui intervient ici d'une toute autre manière d'un point de vue physique. Mais on peut aussi avoir des transformations du type $SO(2) \times SO(4)$ etc... **J'insiste sur le fait qu'ici se sont les paramètres de transformation et non les générateurs des groupes qui ont de l'importance**.

Ainsi, les ibozoo uu sont des entités dont on ne peut rien dire quant à une quelconque forme ou volume ou autre propriété. Cela n'a pas de sens. Tout ce que l'on peut en dire c'est comment ces entités se définissent les unes par rapport aux autres. Elles présentent des caractéristiques d'orientations qui peuvent être **modélisées** dans un **espace de représentation abstrait n'ayant pas de sens et de réalité physique**. Cela peut être par exemple un espace réel de métrique $(-,+,+,-,++)$, ou encore un espace complexe de dimension 9, ou des unions d'espaces divers. Plus précisément, ces entités vont être définies par des opérateurs représentant le groupe de transformation unitaire associé à cet espace fictif de représentation (Par exemple, l'association espace à 3 dimensions et groupe $SO(3)$). C'est à dire, ces opérateurs traduisent comment passer d'une entité à une autre, et en particulier comment passer de l'une d'entre elles, prise pour référence, à toute autre. Ceci au point que l'on assimilera l'entité à la transformation, et plus précisément, on associera l'entitée aux paramètres de la transformation. L'algèbre associée au groupe de transformation permet d'établir une algèbre des paramètres de transformations (paramètres qui correspondent aux angles de rotations pour les $SO(N)$ par exemple). Ces paramètres sont susceptibles de trouver une interprétation physique. Au delà de ces explications, il faut voir une autre (une nouvelle) lecture (application) de la théorie des groupe. On part d'un groupe quelconque, on repère les paramètres de transformation qui sont donc les grandeurs pertinentes du système (les seules avec un sens physique). **Et je rappelle que j'insiste sur le fait que ce sont les paramètres de transformation et non les générateurs des groupes qui ont de l'importance (**contrairement au cas de la théorie des champ**)**. A partir de l'algèbre liée au groupe on construit l'algèbre des paramètres de transformations. On cherche la correspondance entre ces paramètres et les grandeurs physiques d'un système que l'on cherche à modéliser. A partir de l'algèbre des paramètres de transformations on construit alors les équations physiques du système que l'on veut modéliser. L'idée maitresse étant que les paramètres de transformations traduisent les différences d'état entre des entités fondamentales pour lesquelles ont ne peut rien définir d'autre. Ces différences d'état peuvent être vues comme différentes orientations angulaires de ces entités entre elles dans le cadre d'une analogie avec le groupe des rotations. Chaque élèment du groupe de transformation définit une entité par rapport à une autre prise pour référence. Toutefois, et cela a son importance, le fait que seuls les paramètres de type angulaire aient une importance implique que les vecteurs doivent rester invariants dans leur norme. Ainsi les transformations doivent correspondrent à des groupes unitaires.

Il convient de souligner l'importance du fait que les angles soient orientés. En effet un angle va s'établir dans un plan, dans l'espace à 3 dimensions on aura une famille d'angles établit dans des plans différents.En fait chaque angle devient

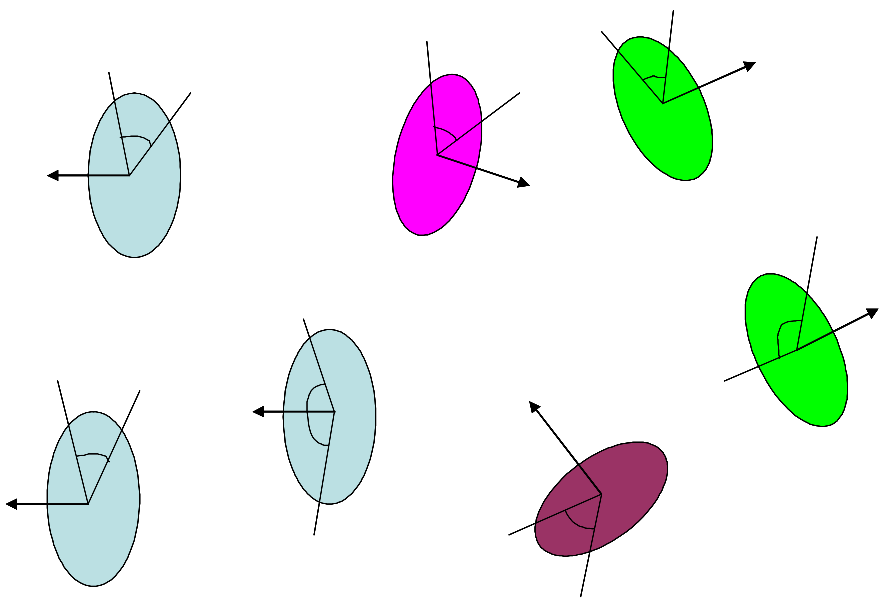
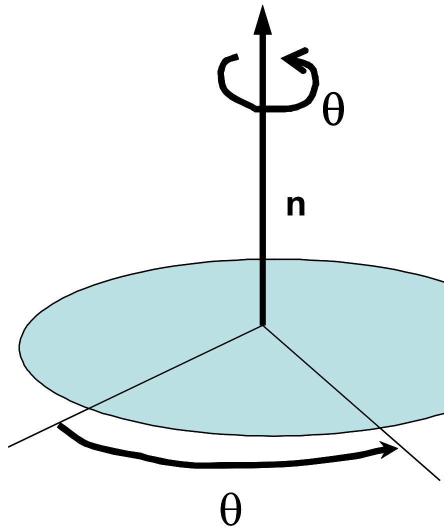


Figure 0.1:

définit par un vecteur $\boldsymbol{\theta} = \theta$ $\mathbf{n}$, où θ est l'angle à proprement parlé, et $\mathbf{n}$ est le vecteur normal au plan dans lequel se situe l'angle.



Dans ce contexte un opérateur rotation par exemple pour $SO(3)$, correspondant à une rotation d'un angle θ autour de l'axe $\mathbf{n}$ est définit par

$$\mathbf{R_n}(\theta) = e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}} \tag{0.8}$$

avec pour $\mathbf{n}$ dans un repère quelconque

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \tag{0.9}$$

et avec pour $\mathbf{L}$ les matrices ($\hbar\mathbf{L} = \mathbf{l}$ correspond au moment angulaire)

$$L_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{0.10}$$

$$L_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{0.11}$$

$$L_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{0.12}$$

c'est à dire

$$\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L} = \theta\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{L} = \theta\left(n_x L_x + n_y L_y + n_z L_z\right) \tag{0.13}$$

Dans ce contexte on peut affiner la définition de notre entité de départ et choisir de la définir par l'objet

$$\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L} \tag{0.14}$$

plutôt que l'opérateur $\mathbf{R_n}(\theta)$ comme suggéré plus haut.

1. Complément 1

Une note, pour ceux qui s'intéresse aux quaternions.

L'opérateur rotation

$$\mathbf{R_n}(\theta) = e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{L}} \tag{1.1}$$

agit sur des vecteurs $\mathbf{V}$ de la forme

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

tel que

$$\mathbf{V}' = \mathbf{R_n}(\theta)\,\mathbf{V} \tag{1.3}$$

Si vous écrivez le vecteur $\mathbf{V}$ sous la forme matricielle

$$\mathcal{V} = x\boldsymbol{\sigma}_x + y\boldsymbol{\sigma}_y + z\boldsymbol{\sigma}_z \tag{1.4}$$

où $\boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\sigma}_y$ et $\boldsymbol{\sigma}_z$ sont les matrices de Pauli qui représentent respectivement les éléments de l'algébre des quaternions $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ et $\mathbf{k}$ avec la correspondance $\boldsymbol{\sigma}_x = i\mathbf{i}$, $\boldsymbol{\sigma}_y = i\mathbf{j}$ et $\boldsymbol{\sigma}_z = i\mathbf{k}$ et où $i = \sqrt{-1}$ avec

$$\boldsymbol{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

on a alors

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

et dans ce cas les rotations s'écrivent

$$\mathcal{V}\ ' = \mathcal{R}_{\mathbf{n}}(\theta)\mathcal{V}\mathcal{R}_{\mathbf{n}}^{\dagger}(\theta) \tag{1.9}$$

avec pour l'opérateur rotation dans ce cas

$$\mathcal{R}_{\mathbf{n}}(\theta) = e^{-i(\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})} \tag{1.10}$$
$$\mathcal{R}_{\mathbf{n}}^{\dagger}(\theta) = e^{i(\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n})} \tag{1.11}$$

où

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_x \\ \boldsymbol{\sigma}_Y \\ \boldsymbol{\sigma}_Z \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

On pourra noter que l'on peut écrire

$$\mathcal{R}_{\mathbf{n}}(\theta) = \cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}) \tag{1.13}$$

2. Complément 2

Un point qui semble important au travers de ces rotations réside au niveau des équations de Maxwell en électromagnétisme. Les équations de Maxwell peuvent s'écrire dans le vide (en l'absence de sources et de milieux matériels)

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \tag{2.1}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} \tag{2.2}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 0 \tag{2.3}$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{2.4}$$

Par ailleurs la densité d'énergie électromagnétique s'écrit

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 \tag{2.5}$$

et l'énergie totale dans tout l'espace

$$W = \int w\ dV \tag{2.6}$$

qui doit se conserver. Posons

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon_0}\mathbf{E} + i\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_0}}\mathbf{B} \tag{2.7}$$

On a alors

$$\int |\mathbf{F}|^2\, dv = \int \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}\; dv = \int w\; dv = W = Cte \tag{2.8}$$

On voit apparaitre le vecteur $\mathbf{F}$ comme un analogue des fonctions d'ondes complexes en mécanique quantique. La conservation de l'énergie remplace la condition de normalisation. On montre facilement que les équations de Maxwell peuvent s'écrire alors

$$\nabla \times \mathbf{F} = i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F} \tag{2.9}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0 \tag{2.10}$$

On a

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

soit encore

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

puis en utilisant le vecteur à composantes matricielles $\mathbf{L}$ introduit plus haut on obtient

$$\hbar c\mathbf{L} \cdot \nabla\; \mathbf{F} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F} \tag{2.13}$$

On obtient une équation comparable à l'équation de Schrodinger qui est de la forme

$$\mathbf{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi \tag{2.14}$$

où $\mathbf{F}$ tient le rôle de la fonction d'onde et où l'hamiltonien est de la forme

$$\mathbf{H} = \hbar c\mathbf{L} \cdot \nabla \tag{2.15}$$

où il est intéressant de noter la présence dans l'expression du moment angulaire qui ici est relié à l'état de spin du photon.

3. Complément 3

A ce stade je voudrais faire une parenthèse qui pourra avoir un intérêt pour certains.Imaginez un triangle sphérique ABC. La longueur de chacun des cotés

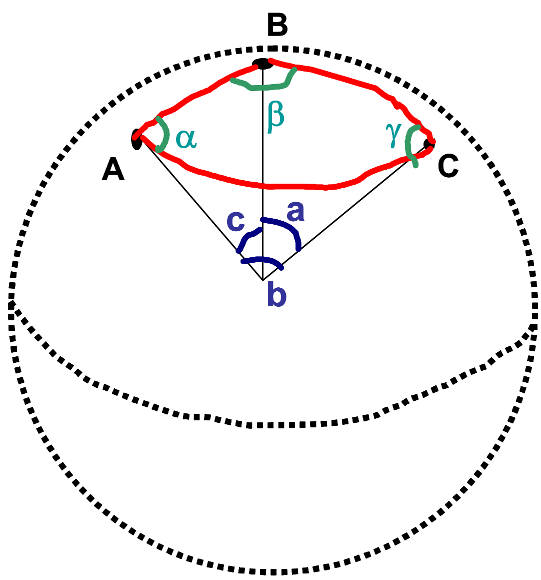


Figure 3.1:

est mesurée par un angle. $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Les angles entre les cotés (voir dessin) sont α, β, γ. On montre alors les relations suivantes

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \tag{3.1}$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \tag{3.2}$$
$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta \tag{3.3}$$

Or pour des angles a, b, c suffisamment petits (c'est à dire tels que l'on puisse considérer que le triangle devient presque un triangle plan) on pourra utiliser les expressions approchées des sinus et cosinus pour les petits angles i.e.

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \tag{3.4}$$
$$\sin \theta \approx \theta \tag{3.5}$$

et on obtient alors les expressions approchées

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma && (3.6)\\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha && (3.7)\\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta && (3.8) \end{aligned}$$

qui sont justement les expressions reliant les longueurs des cotés d'un triangle plan entre elles. Notez que si $\gamma = 90°$, i.e. que le triangle est rectangle on a

$$c^2 = b^2 + a^2 \qquad (3.9)$$

qui n'est autre que le théorème de Pythagore. Autrement dit

$$\cos c = \cos a \cos b \qquad (3.10)$$

c'est le théorème de Pythagore pour un triangle rectangle sphérique.